VEKTORANALYSIS

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H3] *Rotation* **[$4 + 4 + 4 + 4 = 16$ Punkte]**

(a) Im Maschsee werde folgendes Strömungsfeld beobachtet:

$$\vec{v}(\vec{r}) \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1\, x + (\beta - \gamma)\, y \\ (\beta + \gamma)\, x + \alpha_2\, y \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Hierbei sind α_1, α_2, β und γ reelle Parameter. Bei welcher Wahl der Parameter wird die Strömung wirbelfrei?

(b) Zeigen Sie, dass die Forderung nach Wirbelfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes

$$\vec{v}(x, y) \doteq f(x) \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Funktion $f(x)$ bis auf einen konstanten Faktor festlegt.

(c) Für welchen Wert der Konstanten α ist das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\alpha\, z\, \vec{r} - r^2\, \vec{e}_z}{r^5}$$

für $\vec{r} \neq \vec{0}$ wirbelfrei? Es handelt sich um das elektrische Feld eines Dipols im Ursprung.

(d) Eine Strömung der Form

$$\vec{v}(\vec{r}) \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

soll die Wirbelstärke $\mathrm{rot}\, \vec{v}(\vec{r}) = \alpha\, \vec{e}_3\, \delta(x)$ haben. Bestimmen Sie $v_2(\vec{r})$ so allgemein wie möglich. Berücksichtigen Sie dabei eine etwaige y-Abhängigkeit von v_2. Auch die Forderung nach Quellenfreiheit legt v_2 noch nicht restlos fest. Skizzieren Sie zwei Strömungsbilder.
Hinweis: Es handelt sich um mögliche Magnetfelder an einem in y-Richtung stromdurchflossenen Blech auf der yz-Ebene.

[H4] *Divergenz* **[$4 + 4 + 4 = 12$ Punkte]**

(a) Der Maschsee aus [H3](a) sei auch quellenfrei. Was für eine zusätzliche Bedingung ergibt dies für die Parameter? Skizzieren Sie mit einigen repräsentativen Pfeilen $\vec{v}$ zu $\beta = 0$ und zu $\alpha_1 = \beta$.

(b) Für welchen Wert der Konstanten α ist das Feld (mit [H3](c) vergleichen!)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\alpha\, z\, \vec{r} - r^2\, \vec{e}_z}{r^5}$$

für $\vec{r} \neq \vec{0}$ quellenfrei? Es handelt sich *auch* um das magnetische Feld einer winzigen, stark stromdurchflossenen Spule im Ursprung (magnetischer Dipol).

(c) Durch eine kreisförmige Öffnung mit Radius R regne es in infinitesimalen Tropfen auf eine darunter liegende unendlich ausgedehnte Ebene. Das Wasser fließe radial nach außen weg, $\vec{v}(\vec{r}) \doteq f(\rho)\, \vec{\rho}$. Dies ist ein zweidimensionales Problem mit der Polarkoordinate ρ. Gesucht ist $f(\rho)$ für das Gebiet $\rho < R$. In diesem Gebiet ist die Divergenz konstant, $\mathrm{div}\, \vec{v} := \alpha$, woraus sich eine Differentialgleichung für $f(\rho)$ ergibt. Die Lösung wird eindeutig festgelegt durch die Überlegung, dass es ohne Regen auch keine Strömung gibt.

Bitte wenden!

[H5] *Eichung* **[$2+3+3=8$ Punkte]**

Das Vektorpotential $\vec{A}$ eines gegebenen Wirbelfeldes $\vec{B}$, also $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, ist nicht eindeutig bestimmt, denn auf Grund von $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\,\chi(\vec{r})) = 0$ kann man zu $\vec{A}$ den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes χ addieren, ohne das Wirbelfeld zu verändern.
Betrachten Sie das konstante Wirbelfeld $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$.

(a) Verifizieren Sie, dass $\vec{A}_{(1)} = \frac{1}{2}\,\vec{B} \times \vec{r}$ ein Vektorpotential zu $\vec{B}$ ist.

(b) Bestimmen Sie ein Skalarfeld χ so, dass $\vec{A}_{(2)} = \vec{A}_{(1)} + \vec{\nabla}\,\chi$ in y-Richtung zeigt.

(c) Skizzieren Sie die beiden Vektorfelder $\vec{A}_{(1)}$ und $\vec{A}_{(2)}$.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

Die in diesem Aufgabenblatt geforderten Skizzen dürfen Sie auch mit *Mathematica* erstellen. Dies wird allerdings nicht in Bezug auf die Computerübungspunkte angerechnet!